СЪСТЕЗАТЕЛНА ТЕМА

10 март 2024 г.

УВАЖАЕМИ УЧАСТНИЦИ В ТУРНИРА,

Тестът съдържа **21 задачи** по математика, като последната е задача на Журито.

Първите 12 задачи (от 1. до 12. включително) в теста са от затворен тип с четири предложени отговора, отбелязани с главните букви А, Б, В, Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте с химикал със син цвят в **листа за отговори**, а не върху теста. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака $\times$ кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

А Б В Г

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

Б В Г

За всяка задача се допуска не повече от една корекция.

Отговорите на задачите със **свободен отговор от 13. до 17. включително** запишете в **листа за отговори**.

На задачите със **свободен отговор 18., 19., 20. и 21.** напишете пълните решения с необходимите обосновки в **листите за белова**.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачи от 1. до 12. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Най-голямото от следните четири числа е:

А) $\cos 150°$ **Б)** $(0,5.\sqrt[3]{27})^{-2}$ **В)** 5% от 8 **Г)** $\log_2 \frac{1}{8}$ 2 т.

2. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \log_{x+1}\sqrt{x^2-16}$ е:

А) $[-4; 4]$ **Б)** $(-1; +\infty)$ **В)** $(0; +\infty)$ **Г)** $(4; +\infty)$ 2 т.

3. Ако $a = \log_2 40$, $b = \log_2 100$ и $c = 2a - b$, то стойността на c е:

А) 5 **Б)** 4 **В)** 3 **Г)** 2 2 т.

4. Числата $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ образуват геометрична прогресия. Известно е, че $\dfrac{a_7}{a_5} = 3$.

Тогава $\sqrt{\dfrac{a_{17}}{a_1}}$ е равно на:

А) 81 **Б)** 243 **В)** 729 **Г)** 2024 3 т.

5. Изразът $\dfrac{\sin 42° \sin 56° - \sin 48° \sin 34°}{\cos 24° \cos 74° - \cos 66° \cos 16°}$ е равен на:

А) -1 **Б)** 0 **В)** 1 **Г)** -2 3 т.

6. Хорда пресича диаметър на окръжност под ъгъл $30°$ и го дели на отсечки с дължини 4 cm и 12 cm. Разстоянието от центъра на окръжността до хордата е:

А) 1 cm **Б)** 2 cm **В)** 2,5 cm **Г)** 3 cm 3 т.

7. За триъгълник ABC е дадено, че $AC = 8\ cm$, $AB = 10\ cm$ и $BC = 12\ cm$. Ако CL е ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ $(L \in AB)$, то тогава BL е равна на:

А) $6\ cm$ **Б)** $7\ cm$ **В)** $8\ cm$ **Г)** $9\ cm$ 2 т.

8. Даден е успоредник $ABCD$ с лице $60\ m^2$. Нека M е средата на страната AB и N е пресечната точка на AC и DM. Лицето на четириъгълника $MBCN$ е равно на:

А) $15\ m^2$ **Б)** $20\ m^2$ **В)** $25\ m^2$ **Г)** $30\ m^2$ 2 т.

9. Дадени са три окръжности, всяка с радиус 2 и всяка от които минава през центровете на другите две. Лицето на фигурата, образувана от всички точки, които са вътрешни едновременно и за трите окръжности е равно на:

А) $2\pi - \sqrt{3}$ **Б)** $\pi - \sqrt{3}$ **В)** $\pi + \sqrt{3}$ **Г)** $2\pi - 2\sqrt{3}$ 2 т.

10. Височината на правилна триъгълна пирамида е равна на основния ръб. Ако обемът на пирамидата е $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$, то ръбът на пирамидата е:

А) 9 **Б)** $9\sqrt{3}$ **В)** $\sqrt{3}$ **Г)** 3 3 т.

11. Колко прави, лежащи в една равнина, от които никои 3 нямат обща точка и никои две не са успоредни, се пресичат в 55 точки?

А) 10 **Б)** 15 **В)** 11 **Г)** 22 3 т.

12. От множеството $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ се избира по случаен начин двойка различни числа (a, b) и се съставя квадратната функция

$$f_{(a,b)}(x) = x^2 - (a + b + 2)x + ab + 2b.$$

Да се намери вероятността за сбъдване на събитието

$$A = \{ \text{ Уравнението } f_{(a,b)}(x) = 0 \text{ има четни корени } \}.$$

А) $\frac{1}{6}$ **Б)** $\frac{1}{3}$ **В)** $\frac{2}{3}$ **Г)** $\frac{3}{2}$ 3 т.

Отговорите на задачи от 13. до 17. включително отбелязвайте в листа за отговори!

13. В правоъгълен триъгълник ABC височината CC_1 разделя хипотенузата AB на части с дължини $AC_1 = m$ и $BC_1 = n$. Да се намерят дължините на медианите AA_1 и BB_1.
5 т.

14. Единият от ъглите на триъгълника ABC е с мярка $120°$ и страните му a, b, c в този ред са последователни членове на растяща аритметична прогресия. Ако периметърът на $\triangle ABC$ е $15\,cm$, да се намери лицето му. 5 т.

15. Основите на равнобедрения трапец $ABCD$ са $AB = 12\,cm$, $CD = 8\,cm$ и дължината на бедрото му е тяхното средногеометрично. Да се намери тангенсът на острия ъгъл φ между диагоналите AC и BD. 5 т.

16. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - x + 1$. Да се реши неравенството

$$2^{f(-x)+f(x)} > 4^{f(2x)-2x}.$$

5 т.

17. С цифрите 0, 1, 3, 5 и 7 са записани всички четирицифрени числа с неповтарящи се цифри. Да се намери вероятността случайно избрано от тях число да се дели на 5.
5 т.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачи 18., 19., 20. и 21. запишете в листите за белова!

18. В триъгълник е вписана окръжност, центърът на която е свързан с върховете на триъгълника. Лицата на получените триъгълници са 28,60, 80.
Да се намерят страните на триъгълника. 15 т.

19. Да се реши уравнението $3.\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} + 2.3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x}$. 15 т.

20. Зар се хвърля 6 пъти. Да се намери вероятността повече от 3 пъти да се падне число, което се дели на 3. 15 т.

21. ***Задача на журито***

Дадена е квадратната функция $f(x) = 1 + x + x^2$.
а) Да се докаже, че най-голямата стойност на функцията $F(x) = \log_{(4-2\sqrt{3})} f(x)$ е

$$\log_{\left(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

б) Да се намери стойността $M = K_{12}.(W_4)^{-1}$, където K_{12} е коефициентът пред x^{12} в нормалния вид на полинома $P(x) = [f(x)]^{10}$, а W_4 е броят на всички четирибуквени думи без повтарящи се символи, съставени с първите 10 букви на избрана азбука.
20 т.