ВЕЛИКОТЪРНОВСКИ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЙ"
ДВАНАДЕСЕТИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР
ЗА УЧЕНИЦИ ОТ XI И XII КЛАС, 10 МАРТ, 2019 Г.
ВАРИАНТ 2

ПЪРВА ЧАСТ
Отговорите на задачите от 1. до 12. включително отбелязвайте в листа за отговори.

1. Стойността на израза $A=\sqrt{\left(4-6\sqrt{2}\right)^2}-\left(\sqrt{2}-1\right)^3$ е равна на:
А) $-11+9\sqrt{2}$ **Б)** $3+\sqrt{2}$ **В)** $3+7\sqrt{2}$ **Г)** $3-\sqrt{2}$

2. Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ е:
А) $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ **Б)** $x\in(2;+\infty)$ **В)** $x\in(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$ **Г)** $x\in[0;+\infty)$

3. Числата -5 и 1 са корени на уравнението:
А) $x^2+4x-5=0$ **Б)** $x^2-6x+5=0$ **В)** $x^2-2x-5=0$ **Г)** $x^2-4x-5=0$

4. На колко е равно най-голямото цяло число, което е решение на неравенството $x+3x^2\ge 3\left(x^2-2\right)+5x$?
А) 1 **Б)** -1 **В)** 2 **Г)** друг отговор

5. Разликата между най-голямата стойност и най-малката стойност на функцията $f(x)=-x^2+16$ в интервала $[1;3]$ е:
А) 9 **Б)** 8 **В)** 1 **Г)** -8

6. За геометрична прогресия е известно, че $a_5=-48$ и $a_8=384$. Първият член на прогресията е:
А) -2 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** -3

7. Стойността на израза $\dfrac{3\cos 140^\circ}{\cos^2 70^\circ-\sin^2 70^\circ}$ е:
А) 3 **Б)** 0 **В)** 1 **Г)** $\dfrac{3}{2}$

8. От кашон, в който има 6 бели и 10 черни рамки за снимки се изваждат по случаен начин три рамки, без връщане. Каква е вероятността една от тях да е бяла и две от тях да са черни?
А) $\dfrac{12}{56}$ **Б)** $\dfrac{15}{56}$ **В)** $\dfrac{27}{56}$ **Г)** $\dfrac{54}{56}$

9. В триъгълник ABC са дадени ъгъл $\angle BAC=30^\circ$ и височините към страните AB и AC с дължини съответно 4 и $3\sqrt{3}$. Страните на триъгълника са:
А) $2\sqrt{7}$; 6; 8 **Б)** 2; $6\sqrt{3}$; 8 **В)** $2\sqrt{7}$; $6\sqrt{3}$; 8 **Г)** 2; 6; 8

10. За правоъгълния триъгълник ABC е дадено, че CM е медиана към хипотенузата с дължина 8 и ъгъл $\angle ABC=75^\circ$. Височината CD към хипотенузата е равна на:
А) 2 **Б)** 16 **В)** 6 **Г)** 4

11. Основата на права призма е равнобедрен триъгълник с основа 18 и височина към нея, равна на височината на призмата. Да се намери височината на призмата, ако обемът ѝ е 1296.

А) 9 **Б)** 12 **В)** 18 **Г)** 6

12. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 24 и околен ръб 15. Лицето на околната повърхнина на пирамидата е равно на:

А) 324 **Б)** 216 **В)** 144 **Г)** 432

ВТОРА ЧАСТ

Отговорите на задачите от 13. до 17. включително запишете в листа за отговори.

13. Даден е $\Delta ABC, \angle C = 90°$. Ъглополовящата на $\angle C$ пресича AB в точка L, като $AL : BL = 3:4$. Продължението на CL пресича описаната около ΔABC окръжност в точка M и $BM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Ако радиусът на вписаната в ΔABC окръжност е равен на 1, намерете страните на ΔABC и лицето на ΔBMC.

14. Основата на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е ромбът $ABCD$ с остър ъгъл $\angle A$ с големина α и лице, равно на S. Равнината, минаваща през точките B, D и C_1 сключва с равнината на основата ъгъл с големина β. Намерете обема на призмата.

15. Точка M е среда на страната AC на ΔABC, MN е симетрала на AC, $\angle MNC = \angle ABC$ и $\angle BCN = 2\angle BAC$. Ако $BN = 4$, намерете лицето на ΔABC.

16. Намерете първият член и разликата на аритметична прогресия, за която

$$\begin{cases} S_n - a_1 = 75 \\ S_n - a_n = 57 \\ S_n - a_1 - a_2 - a_{n-1} - a_n = 33 \end{cases}$$

17. Да се реши уравнението $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} + \frac{1}{2x-x^2} = 0$

ТРЕТА ЧАСТ

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите 18., 19. и 20. запишете в листите за белова.

18. В ΔABC е построена ъглополовящата $AL(L \in BC)$ на $\angle A$, височината $CH(H \in AB)$ и ъглополовящата $CK(K \in AB)$ на $\angle HCB$. Правите AL и CK се пресичат в точка P, а точка M е среда на AC. Ако $BC = 3, CH = \frac{12}{5}, PM = HM$, намерете страните и лицето на ΔABC.

19. В урна има бели и черни топки. По случаен начин се вадят 2 топки без връщане. Ако вероятността за изваждане на две топки с различен цвят е равна на $\frac{8}{15}$, а белите топки са с 1 повече от черните, намерете вероятността да извадим две бели топки.

20. Намерете стойностите на реалния параметър a, за които функцията $f(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{ax+7}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}}$ има минимум при $x=6$.

21. Даден е правоъгълникът $ABCD$, $\measuredangle ABC=\measuredangle BCD=\measuredangle CDA=\measuredangle DAB=90°$. Точката M лежи на страната BC, а точката N лежи на страната CD, при което $BM{:}MC=1{:}2$ и $CN=ND$. Нека BN и AM се пресичат в точка P, а BN и DM се пресичат в точка Q. Да се намери лицето на правоъгълника $ABCD$, ако е известно, че лицето на триъгълника ΔPQM е равно на 6.