**ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИ 18, 19, 20 И 21**

**ЗАДАЧА 18.** За кои стойности на реалния параметър $k$ уравнението $(k-1)x^2-2kx+k+3=0$ има два реални корена, за които е вярно неравенството $x_1^2+x_2^2\geq 4$?

**РЕШЕНИЕ:**

Условията за параметъра $k$ се изразяват чрез системата

$$\left|\begin{array}{c} k-1\neq 0 \\ D\geq 0 \\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-4\geq 0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\begin{array}{c} k\neq 1 \\ k^2-(k-1)(k+3)\geq 0 \\ \left(\frac{2k}{k-1}\right)^2-2\frac{k+3}{k-1}-4\geq 0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\begin{array}{c} k\neq 1 \\ -2k+3\geq 0 \\ \frac{k^2-2k-1}{(k-1)^2}\leq 0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\begin{array}{c} k\neq 1 \\ k\leq \frac{3}{2} \\ \frac{\left(k-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)(k-(1-\sqrt{2}))}{(k-1)^2}\leq 0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\begin{array}{c} k\neq 1 \\ k\leq \frac{3}{2} \\ k\in[1-\sqrt{2};1)\cup(1;1+\sqrt{2}] \end{array}\right.$$

Възможни отговори:

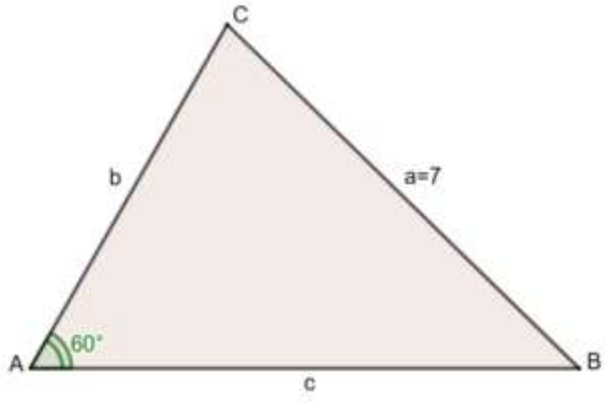
$$k\in[1-\sqrt{2};1)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right]$$

или

$$k\epsilon\left[1-\sqrt{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\{1\}$$

**ЗАДАЧА 19.** Даден е триъгълник $ABC$, за който $AB+AC=13$, $BC=7$ и $\angle BAC=60^0$. Да се намери радиусът на вписаната в триъгълника $ABC$ окръжност.

**РЕШЕНИЕ:**




$$BC=a=7;\ AB=c; AC=b;\ b+c=13$$
$$\measuredangle BAC=60°$$

От косинусова теорема за $\Delta ABC$ и от даденото условие, съставяме системата уравнения:

$$\left|\begin{array}{c} 7^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ \\ b + c = 13 \end{array}\right.$$

Решаваме системата и получаваме:

$$\left|\begin{array}{c} 49 = (13-c)^2 + c^2 - 2(13-c)c.\dfrac{1}{2} \\ b = 13 - c \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\begin{array}{c} c^2 - 13c + 40 = 0 \\ b = 13 - c \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} c_1 = 5 \\ a_1 = 8 \end{array}\right. \text{ или } \left|\begin{array}{l} c_1 = 8 \\ a_1 = 5 \end{array}\right.$$

Така получаваме страните на триъгълника:

$$BC = a = 7\ ;\ AB = c = 8; AC = b = 5.$$

Намираме лицето на $\Delta ABC$ чрез Херонова формула:

$$p = 10$$

$$S = \sqrt{10.3.5.2} = 10\sqrt{3}$$

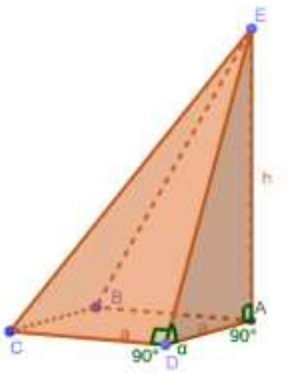
Изразяваме лицето на $\Delta ABC$ чрез формулата $S = pr$ и получаваме радиуса $r$ на вписаната в $\Delta ABC$ окръжност:

$$10\sqrt{3} = 10r$$

$$r = \sqrt{3}$$

**ЗАДАЧА 20.** Основата на пирамида е квадрат. Две от околните стени са перпендикулярни на основата ѝ, а другите две сключват с нея ъгъл $\alpha$. Да се намери обемът на пирамидата, ако радиусът на описаната около коя да е от наклонените стени окръжност е $R$.

**РЕШЕНИЕ:**




Въвеждаме означенията: $AB = BC = CD = DA = a$ и $AE = h$

Равнините $(ADE)$ и $(ABE)$ са перпендикулярни на равнината на основата $(ABCD)$ по условие. Следователно тяхната пресечница $AE$ е перпендикулярна на основата $(ABCD)$. Тогава триъгълниците $ADE$ и $ABE$ са правоъгълни с прав ъгъл при върха $A$.

По условие $ABCD$ е квадрат и от теоремата за трите перпендикуляра, приложена за наклонените $DE$ и $BE$ и техните ортогонални проекции, съответно $DA$ и $BA$ следва, че $\Delta CDE$ и $\Delta CBE$ също са правоъгълни с прави ъгли съответно при върховете $D$ и $B$.

Следователно $\measuredangle\big((CDE),(ABCD)\big) = \measuredangle\big((CBE),(ABCD)\big) = \alpha$.

Разглеждаме $\Delta DAE$, за който $DA = a, AE = h, \measuredangle ADE = \alpha$

От определението за тангенс на остър ъгъл в правоъгълен триъгълник получаваме:

$$tg\alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a.tg\alpha$$

Прилагаме Питагорова теорема за $\Delta ADE$ и получаваме $BE = \sqrt{a^2 + h^2}$

За $\Delta CDE$ получаваме $CE^2 = 2a^2 + h^2$, но $CE$ е диаметър на описаната около $\Delta CDE$ окръжност.

Тогава $CE = 2R$ и са налице равенствата:

$$(2R)^2 = 2a^2 + h^2$$
$$4R^2 = 2a^2 + a^2 tg^2\alpha$$
$$a^2 = \frac{4R^2}{2 + tg^2\alpha} = B$$
$$a = \frac{2R}{\sqrt{2 + tg^2\alpha}}$$
$$h = \frac{2R.tg\alpha}{\sqrt{2+tg^2\alpha}}.$$

Обемът на пирамидата е:

$$V = \frac{Bh}{3} = \frac{1}{3}.\frac{4R^2}{2 + tg^2\alpha}.\frac{2R.tg\alpha}{\sqrt{2 + tg^2\alpha}} = \frac{8R^3 tg\alpha}{3(2 + tg^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

**ЗАДАЧА 21.**

**а)** В таблицата са дадени данни за температурата на връх Ботев за 24 часов период от време през летния сезон. Измерванията са направени, започвайки от 00:00 часа̀ в полунощ и тяхното изменение е отчетено на всеки два ча̀са.

| t ча̀са | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y °C | 10 | 9 | 10 | 12,5 | 16 | 19,5 | 22,1 | 23 | 22,1 | 19,5 | 16 | 12,5 | 10 |

На диаграмата е показана графика на функцията $y = a\sin(b(t - c)) + d$, която най-добре моделира данните от таблицата, $y$ е стойността на температурата, а $t$ – броят на изминалите часове след полунощ. Като използвате свойствата на тригонометричната функция синус, намерете коефициентите $a, b, c, d$.

**РЕШЕНИЕ:**

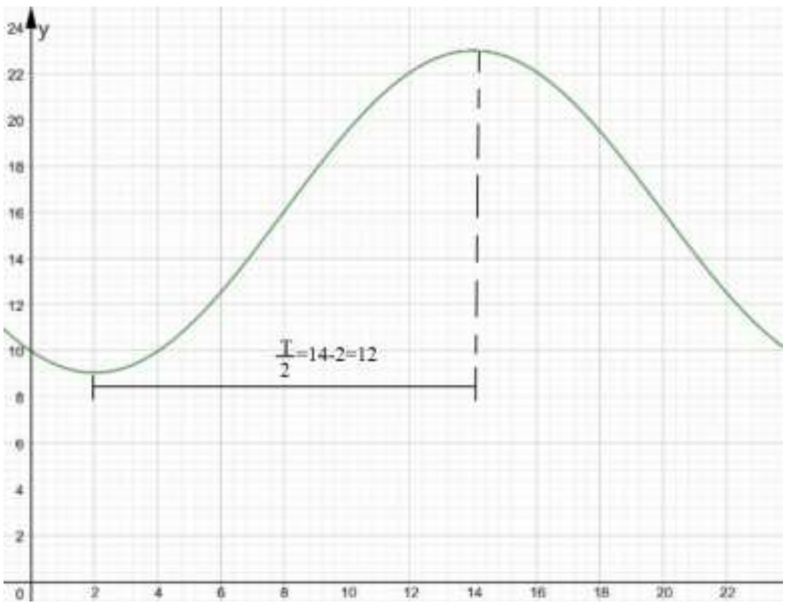
1. Намиране на коефициента $a$:

$$a = \frac{23 - 9}{2} = 7.$$

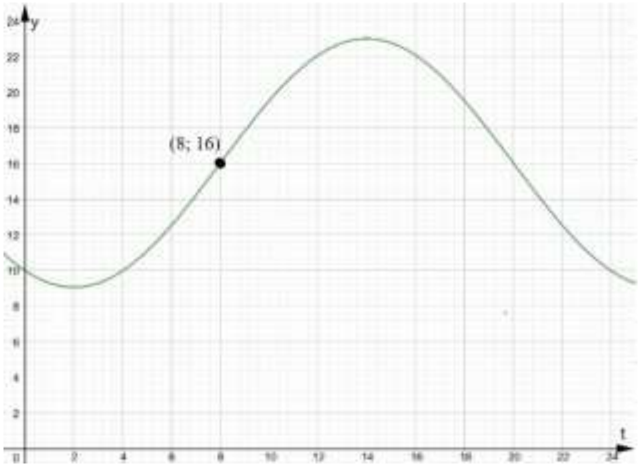
2. Намиране на коефициента b:

$b = \frac{2\pi}{T}$, където T е периодът на синусовата функция. $\Rightarrow T = 24 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$.

Информацията за периода T може да бъде намерена и от таблицата.




3. Намиране на коефициентите ***c*** и ***d***:




$d = \frac{23-9}{2} + 9 = 16$, което отговаря на y-координатата на точката, отбелязана на чертежа, а $\boldsymbol{c}$ е x-координатата на тази точка. Информация за стойността на $\boldsymbol{c}$ може да се намери в таблицата или от чертежа.

$$y = 7\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-8)\right) + 16$$

**б)** Да се реши уравнението $\sqrt{4^{\left(\sin\frac{\pi}{4}x\right)^2} + 4^{\left(cos\frac{\pi}{4}x\right)^2}} = p$, където $x\epsilon(0; 2\pi)$, а $p$ е най-малката стойност на функцията $y = (x-3)^2 + 2$.

**РЕШЕНИЕ:**

НМС на функцията $y = (x-3)^2 + 2$ се съдържа във вида ѝ, тя е $2 \Longrightarrow \sqrt{4^t + 4^{1-t}} = 2$, където $t = \left(\sin\frac{\pi}{4}x\right)^2 \Longrightarrow 4^t + \frac{4}{4^t} = 4 \Leftrightarrow 4^{2t} - 4.4^t + 4 = 0$

Полагаме $4^t = m$ и свеждаме уравнението до квадратното уравнение $(m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow 2^{2t} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\sin\frac{\pi}{4}x\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4}x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

От $\sin\frac{\pi}{4}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3$, а от $\sin\frac{\pi}{4}x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x_3 = 5;\ x_4 = 7$.

$x_4 \notin$ ДМ, дефинирано в условието на задачата.

**в)** Ако $r$ е стойността на най-големия корен на уравнението от подусловие б), за константите $a, d$ и $r$ да се намерят допустимите стойности на израза

$$A = \frac{x+3}{\sqrt[3]{-x^2+4ax-160}} + \log_{\sqrt{x^2+8x+d+3}}(4x - 0{,}2rx^3).$$

**РЕШЕНИЕ:**

$$\left|\begin{array}{c} -x^2+4ax-160 \neq 0 \\ x^2+8x+d+3 > 0 \\ x^2+8x+d+3 \neq 1 \\ 4x-x^3 > 0 \end{array}\right. \qquad a=7, d=16, r=5 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{c} -x^2+28x-160 \neq 0 \\ x^2+8x+19 > 0 \\ x^2+8x+19 \neq 1 \\ 4x-x^3 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{c} x \neq 8, x \neq 20 \\ x^2+8x+19 > 0 \text{ за } \forall\, x \\ x^2+8x+19 > 0 \text{ за } \forall\, x \\ x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2) \end{array}\right.$$

Решенията на системата са $x \in (-\infty;\ -2) \cup (0; 2)$.