ОТГОВОРИ на ЗАДАЧИ от 1. до 12. и от 13. до 21.

№	А	Б	В	Г	Точки
1.		Б			2 т.
2.				Г	2 т.
3.		Б			2 т.
4.	А				3 т.
5.	А				3 т.
6.		Б			3 т.
7.	А				2 т.
8.			В		2 т.
9.				Г	2 т.
10.				Г	3 т.
11.			В		3 т.
12.	А				3 т.

№	Отговор	Точки
13.	$AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2+n^2+5m.n}$, $BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+4n^2+5m.n}$	5 т.
14.	$S_{\Delta ABC} = 15\frac{\sqrt{3}}{4}$	5 т.
15.	$\operatorname{tg}\varphi = 5\sqrt{23}$	5 т.
16.	$x \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$	5 т.
17.	$P = \frac{7}{16}$	5 т.
18.	$14,\ 30,\ 40$	15 т.
19.	$x_1 = \frac{\pi}{2} + k.\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{4} + k.\pi$	15 т.
20.	$P = \frac{73}{729}$	15 т.
21.	$M = \frac{451}{336}$	20 т.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ на ЗАДАЧИ 18., 19., 20. и 21.

18. В триъгълник е вписана окръжност, центърът на която е свързан с върховете на триъгълника. Лицата на получените триъгълници са 28, 60, 80. Да се намерят страните на триъгълника. 15 т.

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ на ЗАДАЧА 18.

Нека даденият триъгълник е ABC със страни $a < b < c$, нека O е центърът на вписаната в него окръжност и r е нейният радиус. От условието следва, че

$$\left| \begin{array}{l} S_{\Delta OBC} = 28 \\ S_{\Delta OCA} = 60 \\ S_{\Delta OAB} = 80 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{ll} \dfrac{a.r}{2} = 28 & (1) \\ \dfrac{b.r}{2} = 60 & (2) \\ \dfrac{c.r}{2} = 80 & (3) \end{array} \right. .$$

След събиране на трите равенства се получава

$$S_{\Delta ABC} = p.r = 168 \qquad (4).$$

От (1), (2), (3) и (4) се изразяват: $a = \dfrac{56}{r},\ b = \dfrac{120}{r},\ c = \dfrac{160}{r}$ и полупериметърът $p = \dfrac{168}{r}$.

След заместване във формулата на Херон се стига до

$$\underbrace{S_{\Delta ABC}}_{=168} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{168}{r}\Big(\frac{168-56}{r}\Big)\Big(\frac{168-120}{r}\Big)\Big(\frac{168-160}{r}\Big)} \iff$$

$$168 = \frac{1}{r^2}\sqrt{168.112.48.8} \iff r^2 = \frac{\sqrt{168.112.48.8}}{168} \iff r = 4.$$

След заместване в изразите за страните се получават:

$$a = \frac{56}{r} = \frac{56}{4} = 14, \qquad b = \frac{120}{r} = \frac{120}{4} = 30, \qquad c = \frac{160}{r} = \frac{160}{4} = 40.$$

19. Да се реши уравнението $3.\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} + 2.3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x}$. 15 т.

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ на ЗАДАЧА 19.

$$3.\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} + 2.3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x} \iff 3.3^{-2\sin^2 x} + 2.3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x}$$

$$\iff 3^{1-2\sin^2 x} + 2.3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x} \iff 3^{\cos 2x} + 2.3^{\cos 2x} = 3^{\sin 2x} \iff 3^{1+\cos 2x} = 3^{\sin 2x}$$

$$\iff 1 + \cos 2x = \sin 2x \iff \sin 2x - \cos 2x = 1 \ |.(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) \iff \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow x \in \left\{ \left(\tfrac{\pi}{4} + n\pi\right) \bigcup \left(\tfrac{\pi}{2} + n\pi\right),\ n \in \mathbb{Z} \right\} \iff x = (4n+1)\tfrac{\pi}{4} \ \bigcup \ x = (2n+1)\tfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

20. Зар се хвърля последователно шест пъти. Да се намери вероятността повече от три пъти да се появят числа, които се делят на три. $\boxed{15 \text{ т.}}$

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ на ЗАДАЧА 20.

Задачата се моделира чрез схема на Бернули – равновероятно появяване на събитие (успех) при всеки опит от серия повтарящи се опити. Оттук вероятността за k успеха при серия от n опита е $P_n(k) = C_n^k.p^k q^{n-k}$, където p е вероятността за успех при всеки опит и $q = 1 - p$ е вероятността за неуспех при всеки опит, а $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ са комбинациите без повторения от n елемента k-ти клас. Конкретно за задачата $n = 6$, $k = 4$, 5, 6 и $p = P(A)$, където $A = \{3, 6\}$ – два изхода за число, което се дели на 3 от общо 6 възможни, т.е. $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ и $q = 1 - p = \frac{2}{3}$. Тогава търсената вероятност е

$$P = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = \underbrace{C_6^4}_{=15}\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}\right)^4\left(\tfrac{2}{3}\right)^2}_{\frac{4}{3^6}} + \underbrace{C_6^5}_{=6}\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}\right)^5\left(\tfrac{2}{3}\right)}_{\frac{2}{3^6}} + \underbrace{C_6^6}_{=1}\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}\right)^6}_{\frac{1}{3^6}} = \frac{60+12+1}{3^6} = \frac{73}{\underline{\underline{729}}}.$$

21. Задача на журито $\boxed{20 \text{ т.}}$

Дадена е функцията $f(x) = 1 + x + x^2$.

а) Да се докаже, че най-голямата стойност на функцията $F(x) = \log_{(4-2\sqrt{3})} f(x)$ е

$$\log_{\left(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

б) Да се намери стойността $M = K_{12}.(W_4)^{-1}$, където K_{12} е коефициентът пред x^{12} в нормалния вид на полинома $P(x) = [f(x)]^{10}$, а W_4 е броят на всички четирибуквени думи без повтарящи се символи, съставени с първите 10 букви на избрана азбука.

ПРИМЕРНО РЕШЕНИЕ на ЗАДАЧА 21.

а) Логаритмичната функция $F(x)$ е дефинирана за всяко $x \in \mathbb{R}$ понеже $f(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (дискриминантата на $f(x)$ е $D_f = -3 < 0$ и параболата $p : y = f(x)$ е насочена по направлението на ординатата Oy от декартовата координатна система Oxy). Понеже основата на логаритъма е $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2 \in (0, 1) \Longrightarrow$ монотонността на $F(x)$ – $\searrow (\nearrow)$ е противоположна на тази на $f(x)$ в съответните интервали.

Параболата на $f(x)$ има връх $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \searrow \text{ за } x \leq -\frac{1}{2} \\ f(x) \nearrow \text{ за } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Тогава $F(x) \nearrow$ за $x \leq -\frac{1}{2}$, $F(x) \searrow$ за $x \geq -\frac{1}{2}$ и при $x = -\frac{1}{2}$ се достига НГС $F(x)$.

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\text{НГС } F(x)}} = \log_{4-2\sqrt{3}}\Big(\text{НМС } f(x)\Big) = \log_{(\sqrt{3}-1)^2} f(-\tfrac{1}{2}) = \underline{\underline{\log_{(\sqrt{3}-1)}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}}.$$

Основата $(\sqrt{3} - 1)$ на логаритъма има следното тригонометрично представяне:

$$\underline{\underline{\sqrt{3}-1}} = 2(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}) = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{6} - \sin\tfrac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\left(\sin\tfrac{\pi}{4}\cos\tfrac{\pi}{6} - \cos\tfrac{\pi}{4}\sin\tfrac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{6}\right)$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}}},$$

а това на аргумента му е $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}$. Така НГС $F(x) = \log_{\left(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

б) $$[f(x)]^{10} = \underbrace{(1+x+x^2)(1+x+x^2)\dots(1+x+x^2)}_{\text{10 множителя}}.$$

Тогава x^{12} се получава от избора на:

- x^2 от 6 множителя, т.е. по C_{10}^6 начина и 1 от останалите 4 множителя,
- x^2 от 5 множителя и x от 2 множителя, т.е. по $C_{10}^5.C_{10-5}^2$ начина и 1 от останалите 3 множ.,
- x^2 от 4 множителя и x от 4 множителя, т.е. по $C_{10}^4.C_{10-4}^4$ начина и 1 от останалите 2 множ.,
- x^2 от 3 множителя и x от 6 множителя, т.е. по $C_{10}^3.C_{10-3}^6$ начина и 1 от останалия 1 множ.,
- x^2 от 2 множителя и x от 8 множителя, т.е. по $C_{10}^2.C_{10-2}^8$ начина.

Тогава $$K_{12} = C_{10}^6 + C_{10}^5.C_{10-5}^2 + C_{10}^4.C_{10-4}^4 + C_{10}^3.C_{10-3}^6 + C_{10}^2.C_{10-2}^8$$
$$= \frac{10!}{6!\,4!} + \frac{10!}{5!\,5!}.\frac{5!}{2!\,3!} + \frac{10!}{4!\,6!}.\frac{6!}{2!\,4!} + \frac{10!}{7!\,3!}.\frac{7!}{6!\,1!} + \frac{10!}{2!\,8!}.$$

От условието следва, че W_4 е равно на броя на наредените 4-елементни подмножества на множество с 10 елемента, т.е. на броя на вариациите от 10 елемента 4-ти клас.

$\Rightarrow W_4 = V_{10}^4 = 10.9.8.7 = \dfrac{10!}{6!}$. Оттук за търсената стойност M се получава

$$\underline{\underline{M}} = K_{12}.(W_4)^{-1} = \frac{6!}{10!}\left(\frac{10!}{6!\,4!} + \frac{10!}{5!\,5!}.\frac{5!}{2!\,3!} + \frac{10!}{4!\,6!}.\frac{6!}{2!\,4!} + \frac{10!}{7!\,3!}.\frac{7!}{6!\,1!} + \frac{10!}{2!\,8!}\right)$$
$$= \frac{1}{4!} + \frac{1}{2!} + \frac{5}{2!.4} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!.7.8} = \frac{1}{2!}\Big(\underbrace{\frac{1}{3.4} + 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{3}}_{=\frac{8}{3}} + \frac{1}{7.8}\Big) = \frac{7.8.8+3}{2.3.7.8} = \underline{\underline{\frac{451}{336}}}.$$

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ за ОЦЕНЯВАНЕ на ЗАДАЧИ 18., 19., 20. и 21.

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ за ОЦЕНЯВАНЕ на ЗАДАЧА 18.

Изразяване на страните и полупериметърът чрез r .... $\boxed{6 \text{ т.}}$

Заместване във формулата на Херон и изразяване на r .... $\boxed{5 \text{ т.}}$

Намиране на страните .... $\boxed{4 \text{ т.}}$

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ за ОЦЕНЯВАНЕ на ЗАДАЧА 19.

Привеждане на показателните събираеми към една и съща основа .... $\boxed{5 \text{ т.}}$

Съставяне на тригонометрично уравнение чрез степенните показатели .... $\boxed{5 \text{ т.}}$

Решаване на полученото тригонометрично уравнение .... $\boxed{5 \text{ т.}}$

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ за ОЦЕНЯВАНЕ на ЗАДАЧА 20.

Обосноваване на вероятностния модел (например чрез схема на Бернули) и определяне на параметрите .... $\boxed{5 \text{ т.}}$

Записване на търсената вероятност чрез сумата от конкретни вероятности за успех . $\boxed{5 \text{ т.}}$

Записване на формулите за вероятностните събираеми и изчисляване на сумата ..... $\boxed{5 \text{ т.}}$

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ за ОЦЕНЯВАНЕ на ЗАДАЧА 21.

а) $\boxed{10 \text{ т.}}$

Обосновка за ДМ за $F(x)$ .... $\boxed{2 \text{ т.}}$

Връзка между монотонното поведение на $F(x)$ и това на $f(x)$ .... $\boxed{4 \text{ т.}}$

Намиране на НГС $F(x)$ .... $\boxed{2 \text{ т.}}$

Представяне на НГС $F(x)$ чрез стойности на тригонометрични функции .... $\boxed{2 \text{ т.}}$

б) $\boxed{10 \text{ т.}}$

Изброяване на всички възможни случаи за получаване на x^{12} от $[f(x)]^{10}$ .... $\boxed{4 \text{ т.}}$

Представяне на K_{12} .... $\boxed{2 \text{ т.}}$

Представяне на W_4 .... $\boxed{2 \text{ т.}}$

Намиране на M .... $\boxed{2 \text{ т.}}$

Забележки

- *При вярна логическа конструкция с допусната техническа грешка се отнема еднократно една точка. Всеки записан, но немотивиран резултат не носи точки.*
- *При забелязване на алогизми от типа "грешно $\Longrightarrow$ вярно" се прекратява разглеждането на съответното решение.*