ВЕЛИКОТЪРНОВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЙ“

ДЕСЕТИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР ЗА УЧЕНИЦИ ОТ 11. И 12. КЛАС

12 МАРТ 2017 г.

ПЪРВА ТЕМА

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧИ ОТ 1. ДО 12.

№ - т.	**А**	**Б**	**В**	**Г**
1. - 2т.			В	
2. - 2т.			В	
3. - 2т.				Г
4. - 2т.		Б		
5. - 2т.			В	
6. - 2т.				Г
7. - 3т.			В	
8. - 3т.	А			
9. - 3т.	А			
10. - 3т.		Б		
11. - 3т.				Г
12. - 3т.				Г

ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧИ ОТ 13. ДО 17.

13. - 5т.	$x_1 = 1$, $x_2 = 5$
14. - 5т.	$a_4 = 8$
15. - 5т.	14
16. - 5т.	$AL = 2\,\mathrm{cm}$
17. - 5т.	$\sqrt{22}\,\mathrm{m}$

УПЪТВАНИЯ КЪМ ЗАДАЧИ 18., 19., 20 и 21.

Задача 18. Даденото уравнение е еквивалентно на

$$\cos 2x(1+2\cos 2x)=0.$$

Оттук всичките решения на уравнението в интервала $(0;\pi)$ са

$$x_1=\frac{\pi}{4},\quad x_2=\frac{\pi}{3},\quad x_3=\frac{2\pi}{3},\quad x_4=\frac{3\pi}{4}.$$

Задача 19. Лицето на успоредника $ABCD$ изразяваме чрез формулата

$$S=\frac{AC.BD}{2}\sin\varphi,\quad (\varphi=\sphericalangle(AC,BD)-\text{острия ъгъл}).$$

Оттук $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$. Нека $O=AC\cap BD$ и $AC>BD$.
От косинусовата теорема за $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$ се получават

$$AB=13\text{cm},\quad BC=\sqrt{57}\text{cm}.$$

Задача 20. Нека дадената пирамида е $ABCDM$ и MD е перпендикулярният околен ръб към равнината на квадрата $ABCD$. Тогава височината $H_M=MD$, линейният ъгъл на двустенния ъгъл $\sphericalangle(p.(ABM),p.(ABCD))=\sphericalangle MAD=\alpha$, а линейният ъгъл на двустенния ъгъл $\sphericalangle(p.(BCM),p.(ABCD))=\sphericalangle MCD=\alpha$. В правоъгълните триъгълници MAB и MCB хипотенузата $MB=2R$. От правоъгълните триъгълници MDB и MDC се намират основният ръб и височината

$$a=\frac{2R\text{cotg}\alpha}{\sqrt{1+2\text{cotg}^2\alpha}},\quad H_M=\frac{2R}{\sqrt{1+2\text{cotg}^2\alpha}}.$$

За обема се получава

$$V=\frac{1}{3}B.H_M=\frac{1}{3}.\frac{4R^2\text{cotg}^2\alpha}{1+2\text{cotg}^2\alpha}.\frac{2R}{\sqrt{1+2\text{cotg}^2\alpha}}.$$

След преобразувания се намира

$$V=\frac{8R^3\text{cotg}^2\alpha}{3(1+2\text{cotg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}=\frac{8R^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{3(1+\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Допълнителна задача 21.

а) $(x_i - x_{i+1}).\left(\frac{1}{x_{i+1}} - \frac{1}{x_1}\right) \leq |x_i - x_{i+1}|.\left|\frac{1}{x_{i+1}} - \frac{1}{x_1}\right| < 1.1 = 1.$
Неравенството $\left|\frac{1}{x_{i+1}} - \frac{1}{x_1}\right| < 1$ лесно се доказва като се използва, че $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_{i+1}} \in (0,1)$.

б) Написваме всичките $(n-1)$ неравенства от а), разкриваме скобите в левите им страни и след това ги събираме почленно. Така получаваме неравенството от б).

в) За доказателството на в) можем да използваме неравенството

$$\begin{aligned} &|x_1 - x_{i+1}| = |x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + x_3 - \ldots - x_i + x_i - x_{i+1}| \\ &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_i - x_{i+1}| < i. \end{aligned} \tag{1}$$

КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИ 18., 19., 20 и 21.

Задача 18.

Перобразуване на лявата страна на уравнението в разложен вид .... 5 точки
Решено уравнението $\cos 2x = 0$ в интервала $(0; \pi)$ .... 5 точки
(4 точки за общото решение и 1 точка за решенията в $(0; \pi)$)
Решено уравнението $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ в интервала $(0; \pi)$ .... 5 точки
(4 точки за общото решение и 1 точка за решенията в $(0; \pi)$)
Забележка. Ако не е записано общото решение, но са намерени решенията в интервала $(0; \pi)$, не се отнемат точки.

Задача 19.

Намерен ъгъл на успоредника или ъгъл φ ....5 точки
Намерена страна AB ....5 точки
Намерена страна BC ....5 точки

Задача 20.

Обоснован чертеж на пирамидата с означени дадени елементи .... 6 точки
Намерена височина H_M ....3 точки
Намерена страна на квадрата ....3 точки
Намерено лице на основата .... 1 точка
Намерен обема на пирамидата .... 2 точка

Допълнителна задача 21.

а) .... 5 точки.
- Преминаване към модулно неравенство ....2 точки.
- Доказване на неравенството за разликата от реципрочните .... 3 точки.

б) .... 7 точки.
- Записване на последователна серия от неравенства .... 3 точки.
- Сумирани неравенства и доказано б) .... 4 точки.

в) .... 8 точки.
- Ограничаване на левия израз в (1) чрез сума от модули на разлики на последователни числа ....3 точки.
- Доказване на неравенството за разликата от реципрочните .... 5 точки.